KIT Karlsruher Institut für Technologie

IRS Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme
Institutsleiter: Prof. Dr.-Ing. Sören Hohmann

Diplomhauptprüfung / Bachelor- bzw. Masterprüfung

"Nichtlineare Regelungssysteme"

16. September 2014

Lösungsblätter

Name: Muster **Vorname:** Lösung

Matrikelnummer: .... **e-mail:** ....

Bitte tragen Sie gleich zu Beginn der Prüfung Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf diesem Deckblatt ein.

Die Lösungen sowie der vollständige und nachvollziehbare Lösungsweg sind in die dafür vorgesehenen Lösungsblätter einzutragen. Nur diese werden bewertet. Bitte verwenden Sie nur dokumentenechtes Schreibzeug.

Bei Platzproblemen können die Rückseiten der Lösungsblätter benutzt oder zusätzliche Lösungsblätter angefordert werden. Eigenes Konzeptpapier ist nicht zugelassen und wird als unzulässiges Hilfsmittel bewertet.

Geben Sie am Ende der Prüfung alle zur Verfügung gestellten Lösungsblätter ab.

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
Σ	

1. Aufgabe

1a)

Superpositionsprinzip / Überlagerungssatz + Verstärkungssatz

Wenn $f(a \cdot x(t) + b \cdot y(t)) = a \cdot f(x(t)) + b \cdot f(y(t))$ gilt, dann ist Linearität gegeben.

1b)

$$ {}_aD_t^{\alpha}\left(a \cdot u_1(t) + b \cdot u_2(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} \cdot $$

$$ \cdot \left(a \cdot u_1(\tau) + b \cdot u_2(\tau)\right) d\tau $$

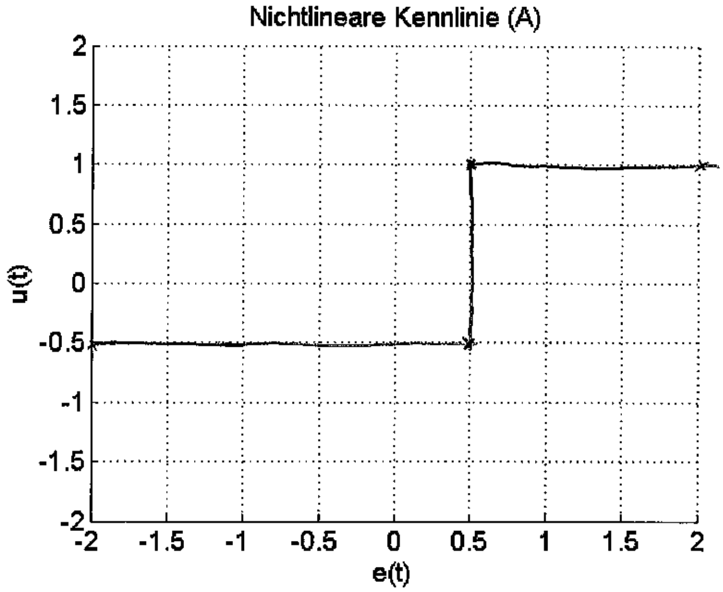
Die Konstanten a und b vor das Integral ziehen und die Summe in 2 Integrale teilen:

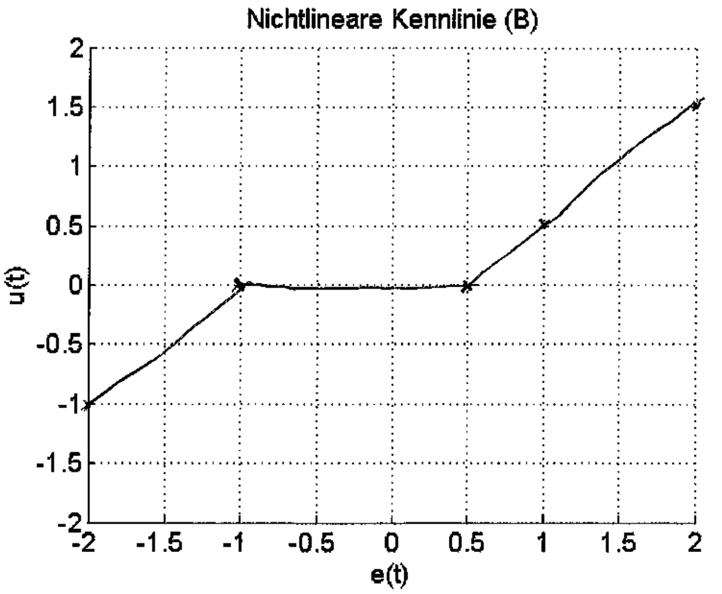
$$ = \underbrace{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \cdot a \cdot \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} u_1(\tau) d\tau}_{} + \underbrace{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \cdot b \cdot \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha} \cdot u_2(\tau) d\tau}_{} $$

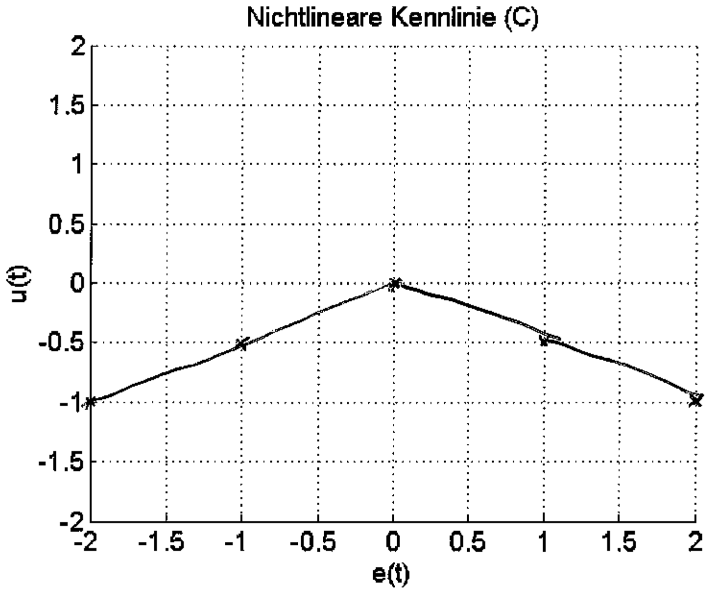
$$ = a \cdot {}_aD_t^{\alpha}(u_1(t)) + b \cdot {}_aD_t^{\alpha}(u_2(t)) $$

$\Rightarrow$ Superpositionsprinzip gilt $\Rightarrow$ linear

1c)


Nichtlineare Kennlinie (A)
u(t)
e(t)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


Nichtlineare Kennlinie (B)
u(t)
e(t)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2


Nichtlineare Kennlinie (C)
u(t)
e(t)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2

2. Aufgabe

2a)

$$N(A)=\begin{cases} 1, & 0\leq A<1 \\ 1+\dfrac{\overset{2}{\cancel{4\cdot 0{,}5}}}{\pi\cdot A}\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{A^2}}, & 1\leq A<3 \\ \dfrac{2}{\pi}\cdot\left[\operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{3}{A}\right)+\dfrac{3}{A}\sqrt{1-\dfrac{9}{A^2}}\right. \\ \quad +\dfrac{2}{\pi A}\sqrt{1-\dfrac{1}{A^2}}, & A\geq 3 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Dreipunktglied und Begrenzung

2b) $N(A)=1+\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{1}{A^4}}, \quad 1\leq A<3$

$$\frac{dN(A)}{dA}=0+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{A^2}-\frac{1}{A^4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-2A^{-3}+4A^{-5}\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{4\frac{1}{A^5}-2\frac{1}{A^3}}{\sqrt{\frac{1}{A^2}-\frac{1}{A^4}}}\overset{!}{=}0$$

$$\Rightarrow \quad 2\cdot\frac{1}{A^5}-\frac{1}{A^3}=0 \quad |\cdot A^5$$

$$2-A^2=0 \Rightarrow A^2=2 \Rightarrow A_{1/2}=\pm\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ nur positive $A \Rightarrow A=\sqrt{2}$

$$N(\sqrt{2})=1+\frac{2}{\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}=1+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}=1+\frac{1}{\pi}$$

Extremum bei $(\sqrt{2}\,/\,1+\frac{1}{\pi})$

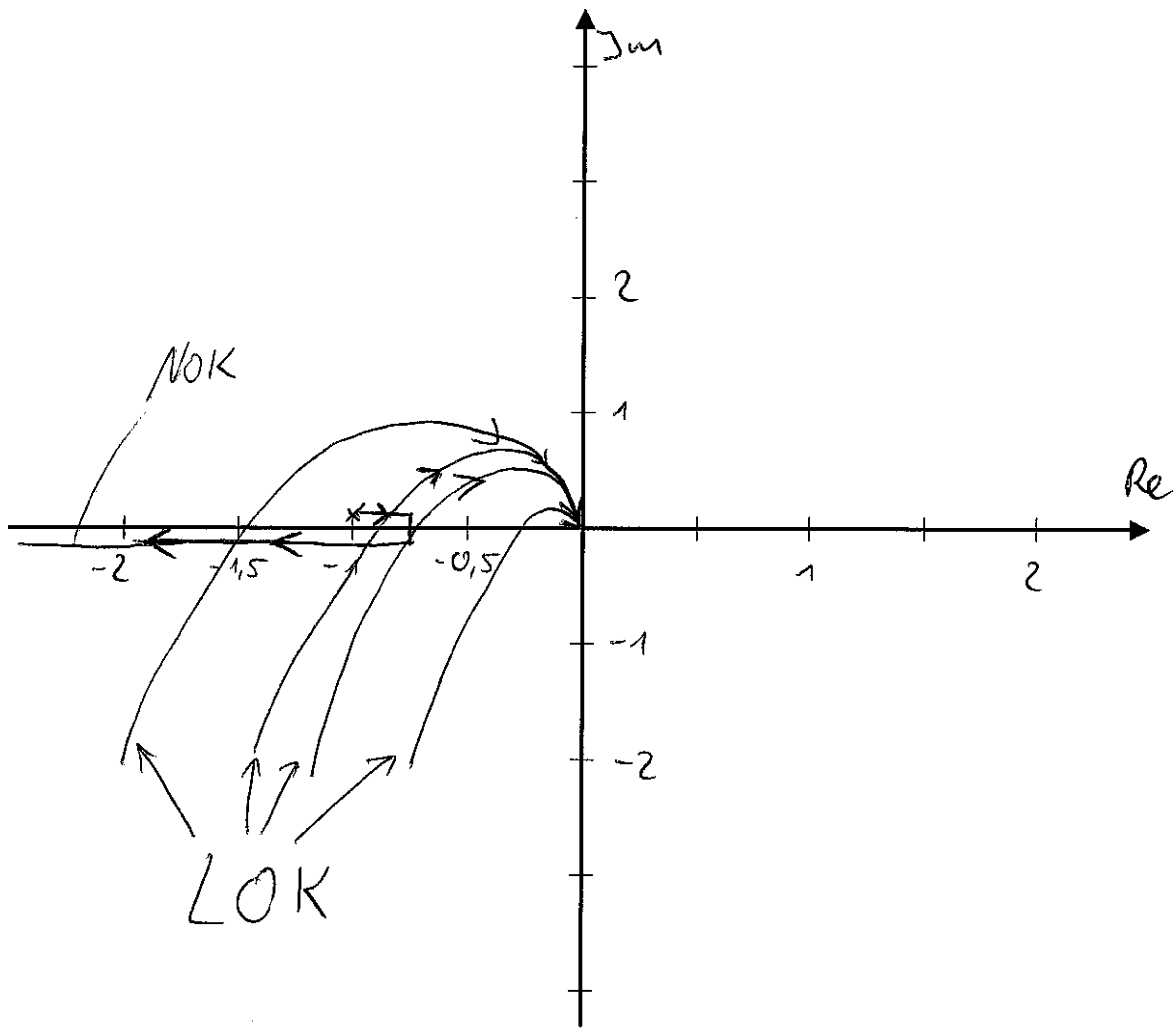
2c) Charakteristische Werte:

Für $A < 1$: $N_I(A) = -1$

(Hinweis) $N_I(\sqrt{2}) = -\frac{1}{1+\frac{1}{\pi}} = \frac{-\pi}{\pi+1} \approx -\frac{3}{4}$

$$N(3) = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\underbrace{\operatorname{Arcsin}\left(\frac{3}{3}\right)}_{=\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{3} \cdot \underbrace{\sqrt{1-\frac{9}{9}}}_{=0} \right] + \frac{2}{3\pi} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{9}}$$

$$= 1 + \frac{2}{3\pi} \cdot \sqrt{\frac{8}{9}} \approx 1{,}2 \Rightarrow N_I(3) \approx -\frac{5}{6}$$



2d)

- Semistabile GS
- Stabile GS
- instabile GS

[• keine GS]

2e) kein Schnittpunkt von NOK und LOK:

Grenzwert: $N_I(A) = -\frac{3}{4}$

$L(j\omega) > -\frac{3}{4}$ oder $L^{-1}(j\omega) < -\frac{4}{3}$

$$\Rightarrow \frac{1}{K} \cdot j\omega_p(4 + 4j\omega_p - \omega_p^2) = \frac{1}{K}(4 \cdot j\omega_p - 4\omega_p^2 - j\omega_p^3)$$

$$\operatorname{Im}(L(j\omega_p)) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow 4\omega_p - \omega_p^3 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow \omega_{p1} = 0$$

$$4 = \omega_p^2 \Rightarrow \omega_{p2/3} = \pm 2$$

Das gesuchte $\omega_p = \omega_{p2} = 2$ einsetzen:

$$\frac{1}{K}(-4 \cdot 2^2) < -\frac{4}{3}$$

$$K < \frac{3}{4} \cdot 16 = 12 \Rightarrow \boxed{K < 12}$$

3. Aufgabe

3a)

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -3x_1x_2 - 2x_2^2x_3 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{u}$$

$$\underline{y} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$$

$$L_{\underline{B}}\, \underline{c}_1(\underline{x}) = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \; 1] \neq \underline{0} \Rightarrow \delta_1 = 1$$

$$L_{\underline{B}}\, \underline{c}_2(\underline{x}) = [0 \quad 0 \quad 2x_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = [0 \; 0] = \underline{0}$$

$$L_{\underline{A}}\, \underline{c}_2(\underline{x}) = [0 \quad 0 \quad 2x_3] \cdot \begin{bmatrix} \cdots \\ \cdots \\ x_1 + x_2x_3 \end{bmatrix} = 2x_1x_3 + 2x_2x_3^2$$

$$L_{\underline{B}} L_{\underline{A}}\, \underline{c}_2(\underline{x}) = [2x_3 ; \; 2x_3^2 ; \; 2x_1 + 4x_2x_3] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= [2x_3 \qquad 2x_3^2 + 2x_3] \neq 0 \Rightarrow \delta_2 = 2$$

volle Differenzordnung

3b)

$$\underline{D}^*(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x_3 & 2x_3^2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{D}^{*-1}(\underline{x}) = \frac{1}{-2x_3} \begin{bmatrix} 2x_3^2 + 2x_3 & -1 \\ -2x_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_3 - 1 & \frac{1}{2x_3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det \underline{D}^*(\underline{x}) \neq 0$ für $x_3 \neq 0 \Rightarrow$ Entkoppelbar für $x_3 \neq 0$

3c)

$$L_{\underline{A}}^{\delta_1} c_1(\underline{x}) = [0 \;\; 1 \;\; 0] \cdot \begin{bmatrix} \cdots \\ -x_1 + x_3 \\ \cdots \end{bmatrix} = \boxed{-x_1 + x_3}$$

$$L_{\underline{A}}^{\delta_2} c_2(\underline{x}) = \left[2x_3 \,;\, 2x_3^2 \,;\, 2x_1 + 4x_2x_3\right] \cdot \begin{bmatrix} -3x_1x_2 - 2x_2^2x_3 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2x_3 \end{bmatrix}$$

$$= -6x_1x_2x_3 - 4x_2^2x_3^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_3^2 + 2x_3^3 + 2x_1^2$$

$$+ 2x_1x_2x_3 + 4x_1x_2x_3 + 4x_2^2x_3^2$$

$$\boxed{= -2x_3^2 - 2x_1x_3^2 + 2x_3^3 + 2x_1^2}$$

$$\underline{r}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -x_3 - 1 & \frac{1}{2x_3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_3 - x_1 + 2 \cdot x_2 \\ -2x_3^2 - 2x_1x_3^2 + 2x_3^3 + 2x_1^2 + 4 \cdot (2x_1x_3) + 4(2x_2x_3^2) + 4x_3^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_3^2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 - x_3 + x_1 - 2x_2 - x_3 - x_1x_3 + x_3^2 + \frac{x_1^2}{x_3} + 4x_1 + 4x_2x_3 + 2x_3 \\ x_3 - x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

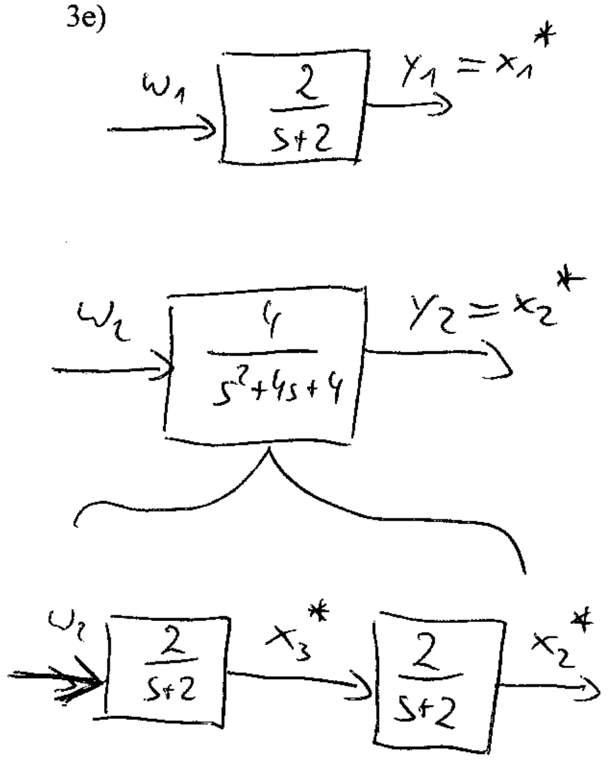
$$= \begin{bmatrix} 2x_2x_3 + 5x_1 - 2x_2 + \frac{x_1^2}{x_3} \\ x_3 - x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \text{ mit } G_1(s) = \frac{2}{s+2} \Rightarrow q_{10} = 2$$

$$G_2(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 4} \Rightarrow q_{20} = q_{21} = 4$$

3d)

$$\underline{V}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -1-x_3 & \frac{1}{2x_3} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2-2x_3 & \frac{2}{x_3} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}}}$$

3e)



$$x_1^*(s) = \frac{2}{s+2}\,\omega_1(s)$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ$$

$$\dot{x}_1^* = 2\omega_1 - 2x_1^*$$

außerdem:

$$\dot{x}_2^* = 2x_3^* - 2x_2$$

$$\dot{x}_3^* = 2\omega_2 - 2x_3^*$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\dot{x}}^* = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}^* + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \underline{\omega}$$

4. Aufgabe

4a)

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \sin(x_1) + e^{x_2} - x_1^2 x_2 \end{bmatrix}$$

4b)

$$\underline{\dot{x}} = \underline{0} \Rightarrow x_2 = 0$$

$$\sin(x_1) + e^0 - x_1^2 \cdot 0 = 0$$

$$\sin(x_1) = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{1R} = \frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x_{2R} = 0 \end{bmatrix}$$

4c)

$$\underline{A} = \left.\frac{\partial \underline{f}(\underline{x})}{\partial \underline{x}}\right|_{\underline{x} = \underline{x}_R} = \begin{pmatrix} 0 & x_{3R} & x_{2R} - 2x_{3R} \\ 0 & -1 & 0 \\ -x_{2R} + x_{3R} & -x_{1R} & x_{1R} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(s\underline{I} - \underline{A}) = \begin{vmatrix} s & 0 & -4 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 4 & 0 & s \end{vmatrix}$$

$$= s^2 \cdot (s+1) + 16 \cdot (s+1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$= s^3 + s^2 + 16s + 16$$

z.B. Hurwitz oder genaues Betrachten: $s_1 = -1$

$\Rightarrow$ EW auf imaginärer Achse! $\Rightarrow$ keine Aussage $\quad s_{2/3} = \pm 4j$

Fortsetzung 4c)

4d)

$$V(\underline{x}) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \left[x_1^2 + (x_2-4)^2 + x_3^2 \right]$$

4e)

$$\dot{V}(\underline{x}) = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \left[2x_1 \dot{x}_1 + 2 \cdot (x_2-4) \cdot \dot{x}_2 + 2 x_3 \dot{x}_3 \right]$$

$$= \lambda \cdot \left[x_1 x_2 x_3 - x_1 x_3^2 + (x_2-4)\cdot(4-x_2) + x_1 x_3^2 - x_1 x_2 x_3 \right]$$

$$= -\lambda \cdot (x_2-4)^2$$

$\Rightarrow$ quadratischer Term $(x_2-4)^2 \geq 0$

wegen negativem Vorzeichen: $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$

$\Rightarrow$ stabil, aber nicht asymptotisch stabil